Série 8 – Partie A

Exercice 8.1 (Midterm 2020)

Le système *conservatif sans gravité* de la Figure 8.1.1 se compose de deux ressorts sans masse de constante k, ainsi que de deux balles de masse $2m$ et d'une ***barre de masse*** $\mathbf{12m}$, de longueur L et de rigidité infinie. On suppose que les angles de rotation θ sont toujours petits ($\theta \ll 1$).

- **i) Combien de degrés de liberté possède le système?........(1 pt)**
- **ii) Écrire l'énergie potentielle du système. Utilisez x_1 et x_2. ....(6 pts)**
- **iii) Écrire l'énergie cinétique du système. Utilisez x_1 et x_2 ....(6 pts)**
- **iv) Écrire les équations du mouvement........(6 pts)**
- **v) Écrire la forme matricielle des équations du mouvement. ....(4 pts)**
- **vi) Trouver les pulsations propres du système. ....(8 pts)**
- **vii) Trouver les modes normaux (vecteurs modaux). ....(4 pts)**

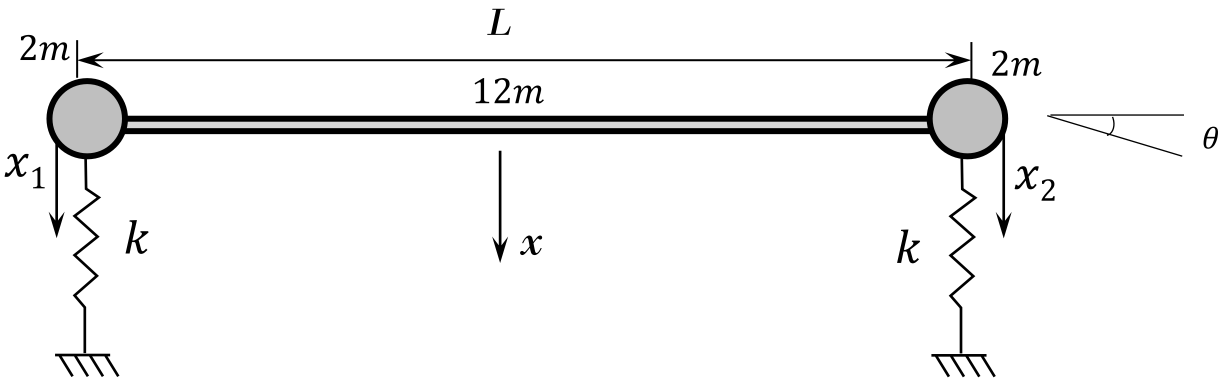

Figure 8.1.1 | Schéma du système, avec la barre de masse 12m de rigidité infinie et les 2 masses 2m, ainsi que les ressorts.

Exercice 8.2

Le système représenté ci-après par la Figure 8.2.1 est formé d'un arbre cylindrique de longueur $4l$, de diamètre d et de module de glissement G, supportant trois disques équidistants de masse m_1 et rayon R_1 pour les deux disques extérieurs et de masse m_2 et rayon R_2 pour le disque central. On négligera la masse de l'arbre dans les calculs.

Déterminer les fréquences et formes propres de torsion du système tournant.

Application numérique : $l = 0.5$ m, d = 0.05 m, G = 80 GPa, m_1 = 10 kg, R_1 = 0.1 m,
m_2 = 50 kg, R_2 = 0.15 m.

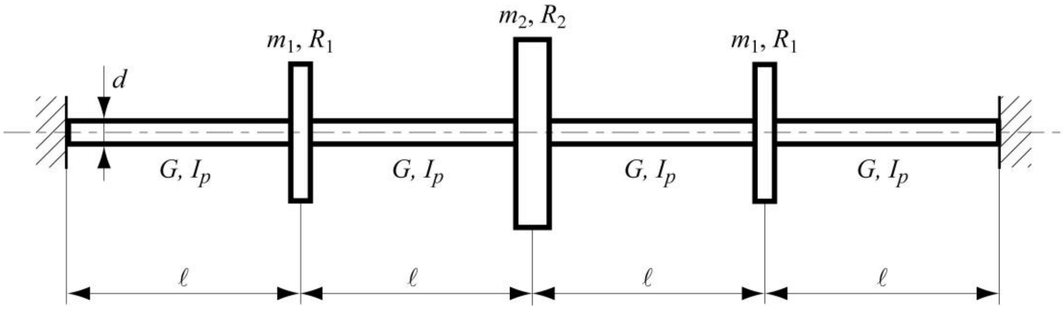

Figure 8.2.1 | Schéma du dispositif

Exercice 8.3

Soit le pendule triple illustré à la Figure 8.3.1 composé de trois masses de poids équivalent m et reliées entre elles par des barres sans masses et indéformables de longueur l.

Etablir les équations du mouvement en θ_1, $\theta_2 et$ θ_3 du pendule triple ci-dessous et calculer les fréquences propres et les formes propres (hypothèse des petits mouvements).

Indications :

- Utiliser la méthode de Lagrange
- Exceptionnellement, on fera les approximations suivantes dans le calcul de l'énergie cinétique : $\cos(\theta_i - \theta_j) = 1$ et $\sin(\theta_i) \simeq \theta_i$ pour i, j = 1, 2, 3.
- Ecrire l'équation caractéristique sous la forme (11.22) du cours

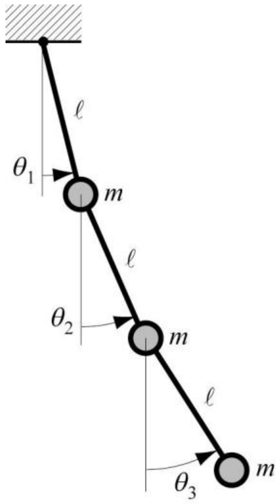

Figure 8.3.1 | Schéma du dispositif

Partie B

Exercice 8.4

Le mécanisme d'entraînement d'un treuil peut être schématisé par la **Figure 8.2.1** ci-dessous. Ce système est formé d'un moteur à inertie J_1 entraînant une première poulie d'inertie J_2 et de rayon R_2 par un arbre de longueur l, de section à moment d'inertie polaire I_p et de module de glissement G. Par l'intermédiaire d'une courroie de longueur libre l', de section A' et de module d'élasticité E', la première poulie entraîne une seconde d'inertie J_3 et de rayon R_3, supportée par le tambour d'enroulement de rayon r_3. La courroie est suffisamment pré-chargée pour que les deux brins restent en traction dans tous les cas. Le câble du treuil est caractérisé par une section A, un module d'élasticité E et une longueur h à un état stationnaire donné et soulève une masse m. Le câble est supposé constamment tendu. Le couplage élastique magnétique entre le rotor et le stator du moteur est représenté par une rigidité de torsion k_0'. On choisira les variables φ_1, φ_2, φ_3 et x_4, dénotant respectivement les angles de rotation du moteur et des deux poulies, ainsi que le déplacement vertical de la masse.

Établir les équations différentielles, sous forme matricielle, des petits mouvements de ce système autour d'un point de fonctionnement stationnaire quelconque.

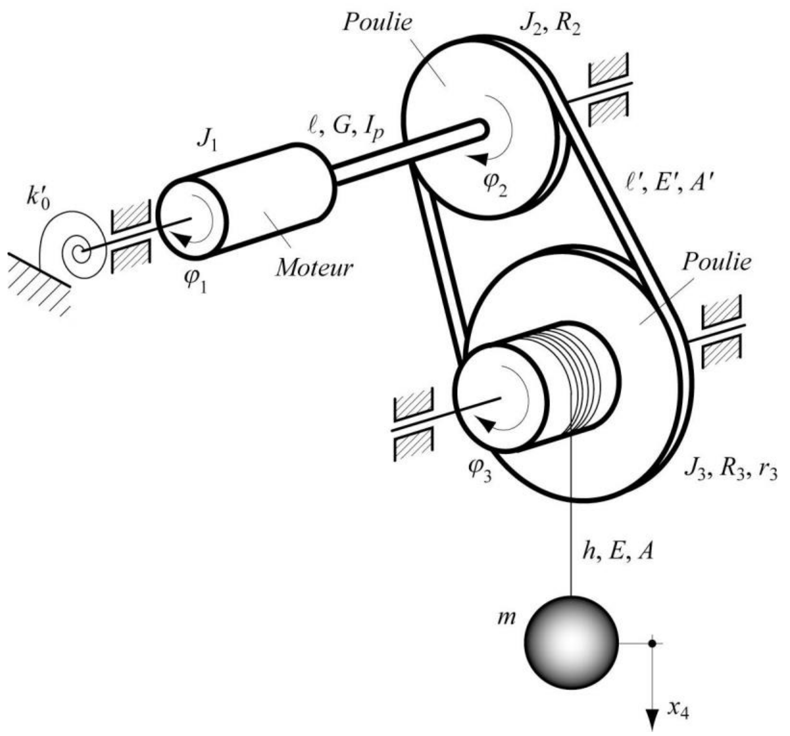

Figure 8.4.1 | Schéma du système.

Exercice 8.5

Une poutre de longueur $3l$, de module d'élasticité E et de section à moment d'inertie I supporte deux masses m_1 et m_2 comme indiqué dans la **Error! Reference source not found.** ci-dessous.

Pour ce système à deux degrés de liberté, **chercher la matrice des coefficients d'influence (compliance), puis déterminer les fréquences et formes propres. Représenter ces formes propres et vérifier leur orthogonalité.**

Application numérique : m_1= 20 kg, m_2= 10 kg, l = 0.5 m, $I = 10^{-8} m^4$, E = 210 GPa

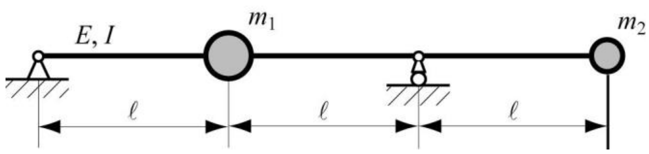

Figure 8.5.1 | Schéma du système.

<u>*Indications*</u> : Pour déterminer la matrice des coefficients d'influence, on considèrera deux perturbations correspondant à une charge unitaire agissant soit sur m_1 soit sur m_2. Ensuite, décomposez les différents cas de perturbation en cas de chargement simple pour chaque tronçon de poutre et combinez les contributions pour obtenir les déplacements des masse m_1 et m_2.

Les déformées d'une poutre de longueur l, soumise à une force P ou à un moment de flexion M et illustrée ci-dessous à la **Error! Reference source not found.** valent respectivement :

a. $y_a(x) = \frac{P}{48EI}(3l^2x - 4x^3) \quad \text{pour} \quad x \leq \frac{l}{2}$

b. $y_b(x) = \frac{M}{6EIl}(x^3 - 3lx^2 + 2l^2x)$

c. $y_c(x) = \frac{P}{6EI}(3lx^2 - x^3)$

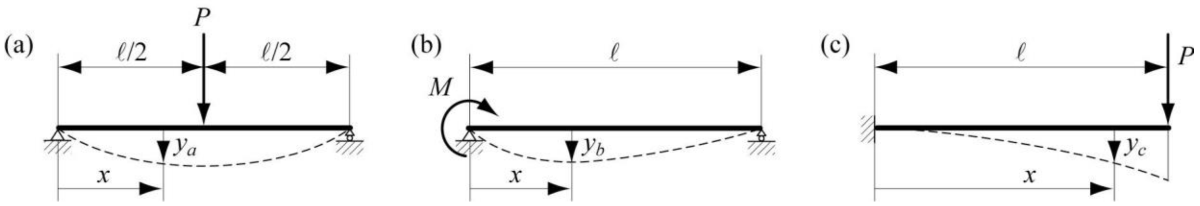

Figure 8.5.2 | Déformées de poutres de longueur l.